

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГЕТЕРОСТРУКТУР СНЕГОЛЕДОВЫХ МАСС

Н. С. Кузнецов, В. В. Смогунов, Н. К. Юрков

Введение

Динамика гетерогенных структур с фазовыми переходами на границах играет важную роль в природных и искусственных системах [1–3].

Например, каждую зиму в г. Москве от сорвавшихся с крыш снеголедовых масс и сосулек страдает более 50 человек и до 300 автомобилей.

Самолеты, вертолеты, морские суда, портовые сооружения, нефтегазовые, космические объекты и другие подвержены обледенению. Эти процессы чреваты серьезными финансовыми потерями, гибелью людей.

Математическое моделирование динамики гетерогенных структур снеголедовых масс является актуальной задачей.

1. Фундаментальная модель нестационарного теплообмена

Модель описывается в рамках двумерного нестационарного уравнения теплопроводности, граничные условия задают конвективный теплообмен с окружающей средой.

Рассматривается бесконечная структура прямоугольного сечения, составленная из разнородных материалов. Материалы различаются теплофизическими свойствами: теплопроводностью λ , удельной теплоемкостью C , коэффициентом теплообмена с окружающей средой α_T . На верхних и нижней гранях происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой T_C . Две другие грани теплоизолированы.

В начальный момент времени структура нагрета до температуры $T_0(X, Y)$. Задача состоит в нахождении поля температур $T(X, Y, t)$.

В математическом отношении задача сводится к решению нестационарного уравнения теплопроводности в двумерной области G с соответствующими краевыми и начальными условиями:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{W} &= 0, \quad W = 0, \quad x = 0, \quad x = L_1; \\ W &= -\alpha_T (T - T_C), \quad y = 0; \\ W &= \alpha_T (T - T_C), \quad y = L_2, \quad T = T_0(x, y), \quad t = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{W}(x, y, t) = -\lambda \operatorname{grad} T$ – тепловой поток; $\alpha_T(X, T)$ – коэффициент теплопроводности; $C(X, Y, T)$ – удельная теплоемкость; $T_0(X, Y)$ – температура в момент $t = 0$. Решение $T(x, y, t)$ ищется в цилиндре $Q_T = \overline{GX} (0 \leq t \leq t^0)$, основанием которого является прямоугольник G с границей ∂G .

2. Конечно-разностная модель гетероструктуры

Задача решается методом конечных разностей, в G вводятся пространственная сетка

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{ (x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, 2N+1, \quad j = 0, 1, \dots, M \}; \\ x_{i+1} &= x_i + hx_{i+1}, \quad y_{j+1} = y_j + hy_{j+1}, \quad x_0 = 0, \end{aligned}$$

$$x_{N+1} = l, \quad x_{2N+1} = L_1, \quad y_0 = 0, \quad y_M = L_2\}$$

и сетка по времени

$$\omega_\tau = \{t_k : t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, P, \quad t_0 = 0, \quad t_P = t^0\}.$$

Здесь hx_i, hy_j, τ_k – переменные шаги сетки по пространству в направлениях X и Y и по времени соответственно.

Задача решается на сетке $\omega_{h\tau} = \omega_h \omega_\tau$, вводится сеточная функция температуры $T_{ij}^k = T(x_i, y_j, t_k)$, определенная на $\omega_{h\tau}$. Разностная схема во внутренней области G записывается на крестообразном шаблоне с центром в узле (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots, 2N$, $j = 1, 2, \dots, M - 1$.

На сетке ω_h рассматривается ячейка с центром в узле (x_i, y_j) и вершинами в полуцелых узлах, т.е. образованными пересечением прямых, проходящих через середины отрезков, соединяющих узлы шаблона, параллельно направлениям X и Y . Размеры ячейки по этим направлениям [1]

$$h_x = 0,5(hx_{i+1} + hx_i), \quad i = 1, 2, \dots, 2N,$$

$$h_y = 0,5(hy_{j+1} + hy_j), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Площадь ячейки $S = h_x h_y$, разностные производные определяются

$$T_x^- = \frac{T_{ij}^k - T_{i-1,j}^k}{hx_i}, \quad T_x = \frac{T_{i+1,j}^k - T_{ij}^k}{hx_{i+1}}, \quad T_y^- = \frac{T_{ij}^k - T_{i,j-1}^k}{hy_j},$$

$$T_y = \frac{T_{i,j+1}^k - T_{ij}^k}{hy_{j+1}}, \quad T_t = \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k}{\tau_k},$$

$$i = 1, 2, \dots, 2N, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1, \quad k = 0, 1, \dots, P - 1.$$

Здесь введены безындексные обозначения для размеров ячейки и производных $T_x^-, T_x, T_y^-, T_y, T_t$. Вводятся также безындексные обозначения для потоков через грани ячейки:

$$W_x^- = -\lambda_{ij}(T_x^-)_{ij}, \quad W_x = -\lambda_{i+1,j}(T_x)_{ij},$$

$$W_y^- = -\lambda_{ij}(T_y^-)_{ij}, \quad W_y = -\lambda_{i,j+1}(T_y)_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, 2N, \quad j = 1, 2, \dots, M - 1.$$

В соответствии с интегроинтерполяционным методом построения разностных схем уравнение теплового баланса для ячейки имеет вид

$$CT_t + S^{-1} [W_x h_y - W_x^- h_y + W_y h_x - W_y^- h_x]^{(\sigma)} = 0. \quad (2)$$

Здесь использовано обозначение $y^{(\sigma)} = \sigma y^{k+1} + (1 - \sigma)y^k$, $0 \leq \sigma \leq 1$.

Узлам, лежащим на границе ∂G , будут соответствовать шаблоны и ячейки несколько иного вида. Если дополнить шаблон в этих точках фиктивными узлами, то уравнение баланса в них запишется также, требуется только положить нулевым соответствующие фиктивные шаги. В общем случае размеры ячейки будут

$$\begin{aligned} h_x &= \delta x_{i+1} hx_{i+1} + \delta x_i hx_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2N + 1, \\ h_y &= \delta y_{j+1} hy_{j+1} + \delta y_j hy_j, \quad j = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \delta x_i = \begin{cases} 0, & i = 0, \quad i = 2N + 2; \\ 0,5, & i = 1, \dots, 2N + 1, \end{cases} \quad \delta y_j = \begin{cases} 0, & j = 0, \quad j = M + 1; \\ 0,5, & j = 1, 2, \dots, M. \end{cases}$$

Потоки через пограничные грани ячейки определяются в случае граничного узла из краевых условий исходной задачи:

$$\begin{aligned}(W_x^-)_{ij} &= 0, \quad i = 0, \quad j = 0, \dots, M, \\(W_x^-)_{ij} &= 0, \quad i = 2N + 1, \quad j = 0, \dots, M, \\(W_y^-)_{ij} &= -\alpha_{T_i} (T_{ij} - T_C), \quad i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = 0, \\(W_y^-)_{ij} &= \alpha_{T_i} (T_{ij} - T_C), \quad i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = M.\end{aligned}$$

Разностная схема на сетке $\omega_{h\tau}$:

$$CT_t + \left[\frac{W_x - W_x^-}{h_x} + \frac{W_y - W_y^-}{h_y} \right]^{(\sigma)} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}W_x^- &= \begin{cases} -\lambda_{ij}(T_x^-)_{ij}, & i = 1, \dots, 2N + 1, \quad j = 0, \dots, M, \\ 0, & i = 0, \quad j = 0, \dots, M. \end{cases} \\W_x^- &= \begin{cases} -\lambda_{i+1,j}(T_x^-)_{ij}, & i = 0, \dots, 2N, \quad j = 0, \dots, M, \\ 0, & i = 2N + 1, \quad j = 0, \dots, M. \end{cases} \\W_y^- &= \begin{cases} -\lambda_{ij}(T_y^-)_{ij}, & i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = 1, \dots, M, \\ -\alpha_{T_i}(T_{ij} - T_C), & i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = 0. \end{cases} \\W_y^- &= \begin{cases} -\lambda_{ij+1}(T_y^-)_{ij}, & i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = 0, \dots, 2N + 1, \\ \alpha_{T_i}(T_{ij} - T_C), & i = 0, \dots, 2N + 1, \quad j = M. \end{cases}\end{aligned}$$

Таким образом, на каждом временном слое t_k ($k = 1, 2, \dots, P$) получена нелинейная система алгебраических уравнений (4), в которую решение подобной системы на предыдущем слое входит как неизвестная функция. На нулевом слое задано начальное распределение:

$$T_{ij}^0 = T_0(x_i, y_j).$$

3. Модель организации внешнего и внутреннего итерационных процессов

Для организации внешнего интеграционного процесса вводятся вектор-функция $T = \{T_{ij}, i = 0, \dots, 2N + 1, j = 0, \dots, M\}$ и операторы A_1, A_2 , определенные равенствами

$$A_1 T = \frac{W_x - W_x^-}{h_x}, \quad A_2 T = \frac{W_y - W_y^-}{h_y},$$

тогда система (4) запишется так:

$$CT_t + (A_1 T + A_2 T)^{(\sigma)} = 0. \quad (5)$$

Для решения ее используется линейно-квадратический процесс. Система (5) переписывается в виде $f(T) \equiv C\check{T} - CT + \tau[A_1 T + A_2 T]^{(\sigma)} = 0$ (здесь $\check{T}$ – значение функции на верхнем временном слое), применяется линейно-квадратичный итерационный процесс:

$$c\delta^{S+1} T + \sigma\tau(A_1^S \delta^{S+1} T + A_2^S \delta^{S+1} T) = -f^S.$$

Верхним индексом помечается номер итерации. Здесь A_1^S и A_2^S линейные операторы

$$A_1^S T = \frac{W_x^S - W_x^-}{h_x}, \quad A_2^S T = \frac{W_y^S - W_y^-}{h_y},$$

где, например,

$$W_x^- = \begin{cases} -\lambda_{ij}(T_x^-)_{ij}, & i=1, \dots, 2N+1, \quad j=0, \dots, M, \\ 0, & i=0, \quad j=0, \dots, M. \end{cases}$$

$$W_y^- = \begin{cases} -\lambda_{ij}(T_y^-)_{ij}, & i=0, \dots, 2N+1, \quad j=0, \\ -\alpha_{Ti}(T_{ij}), & i=0, \dots, 2N+1, \quad j=0. \end{cases}$$

$$f \equiv f(T), \quad \delta^{S+1} T = T^{S+1} - T^S.$$

Внутренний итерационный процесс организуется следующим образом. На каждой итерации внешнего процесса линейная система разностных уравнений записывается без индексов внешней итерации, вводится диагональный оператор D так, что $D\delta T = C\delta T$, и в операторном виде система имеет вид

$$(D + \sigma\tau(A_1 + A_2))\delta T = 0.$$

Для приближения решения этого оператора уравнения применяется двухслойная итерационная схема с чебышевским упорядоченным набором параметров

$$\frac{\delta^{S+1} T - \delta^S T}{\Psi_{S+1}} + (D + \sigma\tau(A_1 + A_2))\delta^S T + f = 0.$$

Здесь $\{\Psi_{S+1}\}$ – упорядоченный чебышевский набор параметров. В пространственной сеточной функции δT в смысле некоторого скалярного произведения удовлетворяются условия самосопряженности, положительной определенности и ограниченности оператора

$$D + \sigma\tau(A_1 + A_2),$$

$$D + \sigma\tau(A_1 + A_2) = (D + \sigma\tau(A_1 + A_2))^*,$$

$$\nu_1 E_1 \leq D + \sigma\tau(A_1 + A_2) \leq \nu_2 E_2,$$

$$0 \leq \nu_1 \leq \nu_2,$$

гарантирующие сходимость внутреннего итерационного процесса.

Границы спектра ν_1 и ν_2 оператора $D + \sigma\tau(A_1 + A_2)$ эффективно оцениваются по теории Гершгорина.

4. Импульс градиента температур

Конкретные исследования по описанию алгоритма проведены для следующих значений параметров линейной задачи:

$$\alpha_T = \begin{cases} \alpha_{T_1}, & 0 \leq x \leq l, \\ \alpha_{T_2}, & l \leq x \leq L_1, \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & 0 \leq x \leq l, \\ \alpha_{T_2}, & l \leq x \leq L_1, \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} c_1, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq L_2, \\ c_2, & l \leq x \leq L_2, \quad 0 \leq y \leq L_2, \end{cases}$$

где $l = 100$ мм, $L_1 = 200$ мм, $L_2 = 200$ мм.

Температурное поле и характер его изменения во времени имеют общий для всех вариантов расчета характерный вид. Температура металла практически постоянна по объему и при переходе из стали в наледь поверхности теплообмена со средой круто падает, т.е. в точках наледи, лежащих на его поверхности по границе с металлом, возникает значительный градиент температуры, направленный вдоль поверхности наледи. Кривая зависимости градиента температуры в угловой точке от времени имеет характерную форму, близкую к форме импульса. Близость кривой к импульсной форме определяется величинами α_{T_1} и α_{T_2} .

При уменьшении $1/\alpha_{T_1}$ и α_{T_2} импульс сглаживается. Такая зависимость от α_{T_1} и α_{T_2} сохраняется при всех исследованных отношениях λ_1/λ_2 , причем от α_{T_2} острота и амплитуда импульса зависят существенно сильнее, чем от $1/\alpha_{T_1}$, отношение λ_1/λ_2 слабо влияет на форму зависимости и определяет преимущественно амплитуду импульса.

Градиент температуры в угловой точке достигает своего максимального значения примерно в одно и то же время (около одной секунды с начала остывания) при различных значениях α_{T_1} , α_{T_2} , λ_1/λ_2 из исследованных интервалов. Крутизна фронта пропорциональна его амплитуде и растет с увеличением как $1/\alpha_{T_1}$ и α_{T_2} , так и с увеличением отношения λ_1/λ_2 . В то же время крутизна спада слабо зависит от отношения λ_1/λ_2 и определяется главным образом значениями α_{T_1} и α_{T_2} .

Полученные результаты позволяют объяснить предпочтения в выборе материала кровли.

5. Модель процесса замерзания жидкого слоя

Математическое моделирование нестационарных тепловых полей состоит в решении нестационарного уравнения теплопроводности в двумерной области G с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{W} = 0,$$

$$\vec{W} = -\lambda \text{grad } T,$$

$$W = -\alpha_T (T - T_C).$$
(6)

Особенностью рассматриваемой задачи является необходимость учета фазового перехода из жидкого в твердое состояние.

Для сквозного счета таких задач без явного выделения фронта затвердевания нужно учесть, что при температуре фазового перехода $T - T^*$ энергия E как функция температуры испытывает переход величины Q^* , который называется теплотой фазового перехода, поэтому для энергии справедливо

$$E = \int_0^T c(T) dT + Q^* \theta(T - T^*),$$

где

$$\theta(T) = \begin{cases} 1, & T \geq 0, \\ 0, & T < 0. \end{cases}$$

Это выражение подставляется в уравнение энергии

$$\frac{\partial E}{\partial T} + \operatorname{div} \vec{W} = Q,$$

и учитывая, что

$$\frac{dQ(T)}{dT} = \delta(T)$$

есть дельта-функция Дирака, получается уравнение

$$\left(C(T) + Q^* \delta(T - T^*) \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{W} = Q,$$

справедливое и в области фазового перехода. Выражения $C(T)$ и $Q^* \delta(T - T^*)$ входят в уравнение одинаковым образом, причем $Q^* \delta(T - T^*)$ представляет собой сосредоточенную теплоемкость на поверхности $T - T^*$.

Для перехода к разностной схеме заменяется дельта-функция приближенно δ -образной или размазанной функцией $\delta(T - T^*, \Delta) \geq 0$, где Δ – величина полуинтервала, на котором функция $\delta(T - T^*, \Delta)$ отлична от нуля.

Таким образом, вводится сглаженная или эффективная теплоемкость $C_3(T) = C(T) + Q^* \delta(T - T^*, \Delta)$, которая удовлетворяет условию $C_3(T) = C(T)$ вне интервала $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$.

Изменение энтальпии на интервале $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ сокращается, т.е.

$$\int_{T^* - \Delta}^{T^* + \Delta} C_3(T) dT = Q^* + \int_{T^* - \Delta}^{T^* + \Delta} C(T) dT.$$

На интервале $(T^* - \Delta, T^* + \Delta)$ можно, например, взять $C_3(T) = \frac{Q^*}{2\Delta} + C(T)$, что будет соответствовать интерполяции δ -функции с помощью прямоугольного импульса. На том же интервале производится сглаживание коэффициента теплопроводности λ . Вводится сглаженный или эффективный коэффициент $\lambda_3(T)$, совпадающий с $\lambda_1(T)$ при $T < T^* - \Delta$ и с $\lambda_2(T)$ при $T > T^* + \Delta$.

Например, если задавалось

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_1, & T < T^*, \\ \lambda_2, & T > T^*, \end{cases}$$

то можно взять

$$\lambda_3(T) = \begin{cases} \lambda_1, & T < T^* - \Delta, \\ \lambda_2, & T > T^* + \Delta, \\ \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta} T + \lambda_1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta} (T^* - \Delta), & T \in (T^* - \Delta, T^* + \Delta). \end{cases}$$

В результате получается задача для уравнения теплопроводности со сглаженными коэффициентами

$$C_3(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{W} = 0, \quad \vec{W} = -\lambda_3(T) \operatorname{grad} T.$$

Моделирование процессов затвердевания границ льда и основы позволяют выбрать композитные тонкие слои по границам гетероструктур [2, 3].

Выводы

1. Рассмотрена фундаментальная модель процесса теплообмена в гетероструктуре в форме нестационарного уравнения теплопроводности.
2. Описана конечно-разностная модель гетероструктур с введением пространственной сетки и применением интегроинтерполяционного метода построения разностных схем.
3. Предложена эффективная модель организации внешнего и внутреннего итерационных процессов с применением двухслойной итерационной схемы с чебышевским упорядоченным набором параметров.
4. Модель процесса замерзания жидкого слоя наледи построена без явного выделения фронта затвердевания с учетом теплоты фазового перехода.
5. Проведены системные исследования тепловых процессов в гетероструктурах, установлены закономерности протекания нестационарных процессов.

Заключение

1. Модели динамики гетероструктур снежоледовых масс с фазовыми переходами на границах позволили установить новые закономерности нестационарных процессов обледенения наиболее распространенных в технике гетероструктур.
2. Использование установленных закономерностей в практике проектирования гетероструктур представляет новые возможности в получении более безопасных конструкций.
3. Наиболее распространенные гетероструктуры крыш зданий и сооружений целесообразно устраивать с разными коэффициентами трения точно по всей крыше и узкой (около 1 %) полосе гидрофобного композита по краям крыш для снижения размера сосулек до безопасного. В качестве тонкослойных композитов для разных материалов крыш разработаны и испытаны эффективные, весьма долговечные и недорогие составы, а также технологии их нанесения с учетом конкретных условий применения.

Библиографический список

1. Динамика гетероструктур. Фундаментальные модели / В. В. Смогунов, И. П. Климинов, О. А. Вдовикина и др. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2002. – 598 с.
2. Садыхов, Г. С. Оценка вероятности безотказного срабатывания объекта при высоких уровнях безотказности / Г. С. Садыхов, А. А. Артюхов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – Т. 1. – С. 37–38.
3. Ермолаев, В. А. Риски отказов сложных технических систем / В. А. Ермолаев, Н. К. Юрков, Ю. А. Романенко // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2014. – Т. 1. – С. 46–49.

Кузнецов Никита Сергеевич

студент,
Пензенский государственный университет
(440026, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: kuznechov@mail.ru

Смогунов Владимир Васильевич

доктор технических наук, профессор,
кафедра теоретической и прикладной механики
и графики,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: smogunov@mail.ru

Kuznetsov Nikita Sergeevich

student,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Smogunov Vladimir Vasil'evich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of theoretical and applied mechanics
and graphics,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Юрков Николай Кондратьевич

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
заведующий кафедрой конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: yurkov_NK@mail.ru

Аннотация. Приведены результаты разработки моделей динамики гетероструктур снежоледовых масс: фундаментальной модели нестационарного теплообмена, конечно-разностной модели гетероструктур, модели организации внешнего и внутреннего итерационных процессов, модели процесса замерзания жидкого слоя. Установлены новые закономерности протекания нестационарных процессов в гетероструктурах снежоледовых масс, позволяющие получать более безопасные конструкции и технологии. Сформулированы рекомендации по целесообразному устройству снежоледоудержания и уменьшению сосулькообразования, а также предложены материалы и технологии нанесения новых композитов для безопасных конструкций.

Ключевые слова: модели, динамика, гетероструктуры, снежоледовые массы, фазовые переходы.

Yurkov Nikolay Kondrat'evich

doctor of technical sciences, professor,
honoured worker of science of the Russian Federation,
head of sub-department of radio equipment
design and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Abstract. The results of the development of models for the dynamics of heterostructures of snow-ice masses are presented: a fundamental model of nonstationary heat transfer, a finite-difference model of heterostructures, a model for organizing external and internal iteration processes, and a model for the freezing process of a liquid layer. New regularities of nonstationary processes in heterostructures of snow-ice masses have been established, which allow obtaining safer designs and technologies. Recommendations are formulated on the expedient arrangement of snow retention and reduction of soter formation, and materials and technologies for applying new composites for safe structures

Key words: models, dynamics, heterostructures, snow-ice masses, phase transitions.

УДК 531. ББК 24.45;621.91.002

Кузнецов, Н. С.

Модели динамики гетероструктур снежоледовых масс / Н. С. Кузнецов, В. В. Смогунов, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 1 (17). – С. 42–49. DOI 10.21685/2307-4205-2017-1-6.